

Kaliman modification とハンドル接着

北海道大学 大学院理学院 数学専攻
赤川正朋 (Masatomo AKAGAWA) *

概要

Kaliman modification という、複素代数多様体とその中の既約超曲面から新たに複素代数多様体を作る操作がある ([Ka94]). この操作を 2-ハンドルの接着として解釈し、 \mathbb{C}^2 とその中の既約代数曲線に対する Kaliman modificatiton の Kirby 図式を求めた. また、ある特異点付きの超曲面の Kaliman modification が \mathbb{R}^6 と微分同相になることを示し、 \mathbb{R}^6 上に有限型の Stein 構造を構成した. 本研究は指導教員である粕谷直彦氏との共同研究である.

1 ハンドル分解と Kirby 図式

ここでは、可微分多様体のハンドル分解と Kirby 図式について述べる. 詳しくは [GS99], [EH24], [Ta92]などを参照せよ.

1.1 ハンドル分解

特に断らない限り、 M は境界を持つ実 n 次元可微分多様体とする.

定義 1.1 (ハンドル接着). 整数 k ($0 \leq k \leq n$) に対し、 $h^k := D^k \times D^{n-k}$ とおく. 滑らかな埋め込み $\alpha: \partial D^k \times D^{n-k} \rightarrow \partial M$ による接着空間 $M \cup h^k$ の角を解消すると、自然に実 n 次元可微分多様体の構造が入る. この操作を M への k -ハンドル接着と言ひ、 $M \cup_\alpha h^k$ で表す. このとき、組 (h^k, α) を n 次元 k -ハンドルまたは指数 k のハンドル、 α を接着写像、 $\partial D^k \times D^{n-k}$ を接着領域、 $D^k \times \{0\}$ をコア、 $\partial D^k \times \{0\}$ を接着球面、 $\{0\} \times D^{n-k}$ をココア、 $\{0\} \times \partial D^{n-k}$ をベルト球面と呼ぶ. $k=2$ の場合、接着球面 $\partial D^2 \times \{0\}$ を接着円周と呼ぶこともある.

定義 1.2 (ハンドル体, ハンドル分解, 双対ハンドル). X を n 次元可微分多様体とする. 0 以上の整数の組 s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) によって

$$X \cong (h_1^0 \cup \dots \cup h_{s_0}^0) \cup (h_1^1 \cup \dots \cup h_{s_1}^1) \cup \dots \cup (h_1^n \cup \dots \cup h_{s_n}^n)$$

という表示が与えられているとき、 X をハンドル体、この表示を X の (整列された) ハンドル分解と言う. また、 0 -ハンドルから k -ハンドルまでを接着することで得られる多様体

$$X_k := (h_1^0 \cup \dots \cup h_{s_0}^0) \cup (h_1^1 \cup \dots \cup h_{s_1}^1) \cup \dots \cup (h_1^k \cup \dots \cup h_{s_k}^k)$$

* E-mail: akagawa.masatomo.i1@elms.hokudai.ac.jp

を k -ハンドル体と言う。

命題 1.3. 全ての連結でコンパクトな n 次元可微分多様体 X は、0-ハンドルがただ1つだけのハンドル分解を持つ。さらに、 X が閉多様体であるとき、 n -ハンドルがただ1つだけのハンドル分解を持つ。

例 1.4 (複素射影空間のハンドル分解). 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ のアトラス $\{(U_i, \psi_i) \mid i = 1, 2, \dots, n+1\}$ を次のようにとる。

$$U_i := \{[z_1, z_2, \dots, z_{n+1}] \mid z_i \neq 0\},$$

$$\psi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^n; [z_1, \dots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \dots, z_{n+1}] \mapsto \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right).$$

これらと $D := \{(w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n \mid |w_i|^2 \leq 1 \ (i = 1, 2, \dots, n)\}$ に対し、 h^{2k} ($k = 0, 1, \dots, n$) を

$$h^{2k} = \psi_{n-k+1}^{-1}(D)$$

によって定める。そうすると、 h^{2k} を $2k$ -ハンドルとする $\mathbb{C}P^n$ のハンドル分解が得られる。

例えば $n = 2$ のとき、 h^0 と h^2 の共通部分は

$$\begin{aligned} h^0 \cap h^2 &= \left\{ [z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{C}P^2 \mid \left| \frac{z_1}{z_3} \right|^2 \leq 1, \left| \frac{z_2}{z_3} \right|^2 \leq 1, \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \leq 1, \left| \frac{z_3}{z_2} \right|^2 \leq 1 \right\} \\ &= \{ [z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{C}P^2 \mid |z_1|^2 \leq |z_2|^2, |z_1|^2 \leq |z_3|^2, |z_2|^2 = |z_3|^2 \} \\ &= \left\{ \left[\frac{z_1}{z_2}, 1, \frac{z_3}{z_2} \right] \in \mathbb{C}P^2 \mid \left| \frac{z_1}{z_2} \right|^2 \leq 1, \left| \frac{z_3}{z_2} \right|^2 = 1 \right\} \\ &\cong \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |w_1|^2 \leq 1, |w_2|^2 = 1\} \\ &\cong D^2 \times S^1 \end{aligned}$$

であることから、 $\{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \mid w_1 = 0, |w_2| \leq 1\}$ をコアとする 2-ハンドル h^2 が接着円周 $\{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \mid w_1 = 0, |w_2| = 1\}$ に沿って 0-ハンドル h^0 に接着されている様子が分かる。またこのとき、接着写像 $\psi_3 \circ \psi_2^{-1}: \psi_2(h^0 \cap h^2) \rightarrow \psi_3(h^0 \cap h^2)$ は

$$\psi_3 \circ \psi_2^{-1}(w_1, w_2) = (w_2^{-1}w_1, w_2^{-1})$$

となり、フレーミング係数は 1 であることが分かる (フレーミング係数については 1.2 節を参照)。

$\mathbb{C}P^n$ 上に複素構造から来る自然な向きとは逆の向きを入れたものを $\overline{\mathbb{C}P^n}$ と表す。 D の向きを逆にする自己微分同相 $\phi: D \rightarrow D$ を

$$\phi(w_1, w_2, \dots, w_n) = (\overline{w_1}, w_2, \dots, w_n)$$

によって定めれば、 $\{(U_i, \phi \circ \psi_i) \mid i = 1, 2, \dots, n+1\}$ は $\overline{\mathbb{C}P^n}$ のアトラスとなる。よって、 h^{2k} ($k = 0, 1, \dots, n$) は $\overline{\mathbb{C}P^n}$ のハンドル分解をも与えている。ただし、 $n = 2$ の場合、2-ハンドル接着のフレーミング係数は -1 となることに注意が必要である。

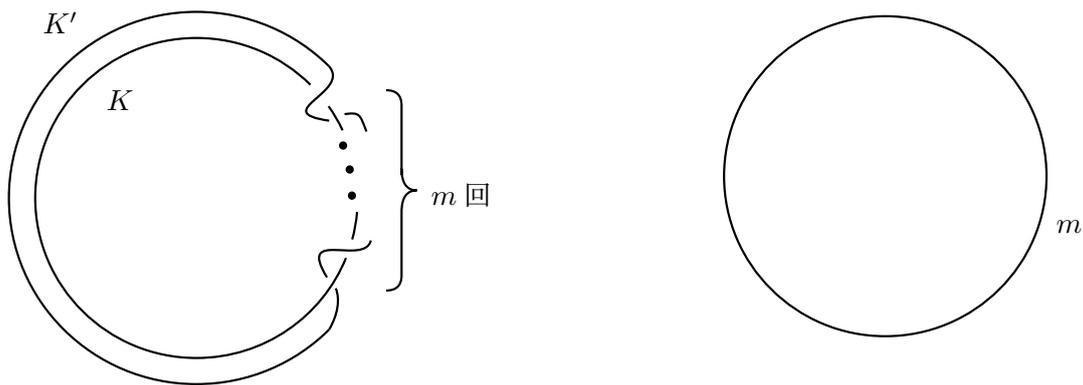


図1 フレーミング係数

1.2 Kirby 図式

コンパクトかつ連結な向きづけられたな 4 次元多様体のハンドル分解は, Kirby 図式と呼ばれる \mathbb{R}^3 内の枠付き絡み目によって表すことができる. ここでは, 4 次元多様体のハンドル分解から Kirby 図式を得る方法について述べる.

X をコンパクトかつ連結な向きづけられた 4 次元多様体とし, 0-ハンドルを 1 つだけ持つハンドル分解が与えられているとする (命題 1.3). 0-ハンドルの境界 $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 内の \mathbb{R}^3 上に接着の様子を描くことで Kirby 図式を構成していく.

1.2.1 1-ハンドル

1-ハンドルの接着領域は $S^0 \times D^3 = \{-1, 1\} \times D^3$ である. 従って, 1-ハンドルの接着は \mathbb{R}^3 内に 2 つの球体を描くことで表される. X は向きづけられていると仮定していたので, 1 つの 1-ハンドルを D^4 に接着することで得られる多様体は $S^1 \times D^3$ と微分同相である. 複数個の 1-ハンドルが接着される場合は, 各 1-ハンドルの接着領域がどの球体のペアなのかかわかるようにする必要がある. そのために, アイストピーで接着領域を動かして, ペアの球体を十分近づけておく.

1.2.2 2-ハンドル

2-ハンドルの接着円周は $\partial D^2 \times \{0\} = S^1$, 接着領域は $\partial D^2 \times D^2 = S^1 \times D^2$ であり, 接着円周は 1-ハンドル体の境界内のある結び目 K , 接着領域はその管状近傍として現れる. ここで, $x \in D^2 - \{0\}$ をとると $\partial D^2 \times \{x\}$ も K とは交わらないある結び目 K' として埋め込まれる. K' を結び目 K の枠, K と K' の絡み数 $lk(K, K')$ を **フレーミング係数** と呼ぶ (図 1). 接着円周が完全に \mathbb{R}^3 内に含まれている場合は, 図式に結び目 K をそのまま描き, 近くにフレーミング係数を書く. 接着円周が 1-ハンドルの非接着領域を通る場合は, K と \mathbb{R}^3 の共通部分のみを描く (図 2).

1.2.3 3, 4-ハンドル

3, 4-ハンドルは図式内に個数だけを書く. これは次のような事情による.

今, X は閉多様体で, 0, 4-ハンドルが 1 つだけのハンドル分解が与えられているとする (命題

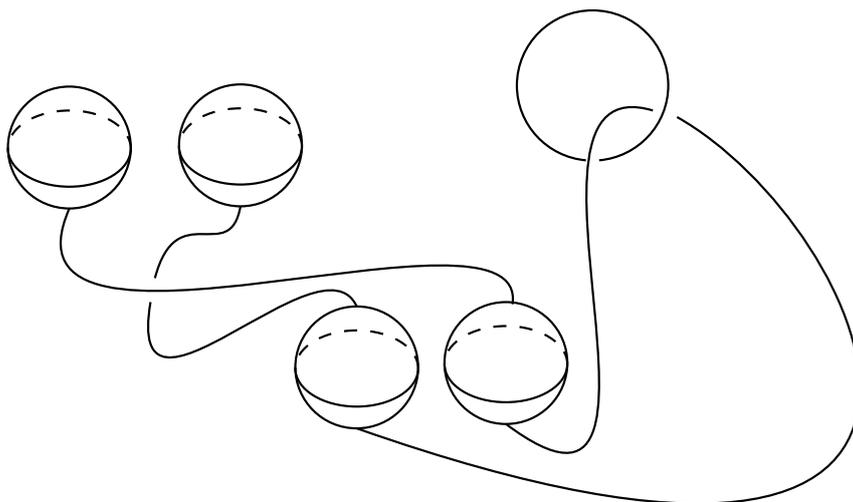


図2 Kirby 図式上の 1-ハンドルと 2-ハンドル

1.3). 3-ハンドルの非接着領域は $D^3 \times \partial D^1 = D^3 \times \{-1, 1\}$ であり, この領域は 4-ハンドルの接着領域に完全に含まれる. 従って, 3-ハンドルと 4-ハンドルの和集合 $X - \text{Int}X_2$ は, 双対ハンドル分解によって 4-ハンドルを 0-ハンドルとみなし, そこへ 3-ハンドルを 1-ハンドルとして接着した多様体に微分同相である. 特に, 3-ハンドルの個数を j とすると, $X - \text{Int}X_2$ は境界連結和 $\natural_j D^3 \times S^1$ と微分同相である. X はこの多様体を境界に沿って X_2 に接着することで得られるが, これによってできる多様体の微分同相型は接着写像のとり方によらないことが次の定理からわかる.

定理 1.5 ([LP72]). $\natural_j D^3 \times S^1$ の境界 $\natural_j S^2 \times S^1$ の自己微分同相写像は, $\natural_j D^3 \times S^1$ の自己微分同相写像に一意的に拡張される.

よって, 3-ハンドル, 4-ハンドルの接着を指定せずとも, X_2 から閉多様体 X の微分同相型は一意に定まる.

一方で, 多様体が閉ではない場合には微分同相型が接着写像に依存するが, その場合でも個数だけを書く.

点付き円周には次のような解釈がある. D^4 に 1-ハンドルを接着し, それをキャンセルするような 2-ハンドルを接着すると, その多様体は再び D^4 と微分同相になる. 従って, 1-ハンドルを接着することは D^4 からその 2-ハンドルを取り除くことと等価である. この 2-ハンドルはそのコアの管状近傍とすることができ, コアは D^4 に自明に埋め込まれた円盤, ベルト球面は S^3 内の自明な円周としてみえている. この円周が点付き円周に対応する.

例 1.6. $D^2 \times T^2$ と CP^2 の Kirby 図式は図 4 のように表される. CP^2 のハンドル分解については例 1.4 をみよ.

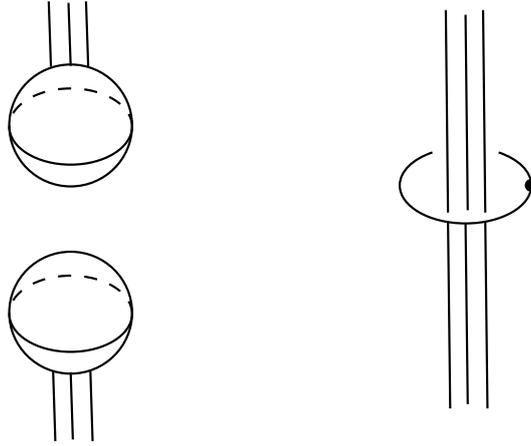


図3 点付き円表示への描きかえ

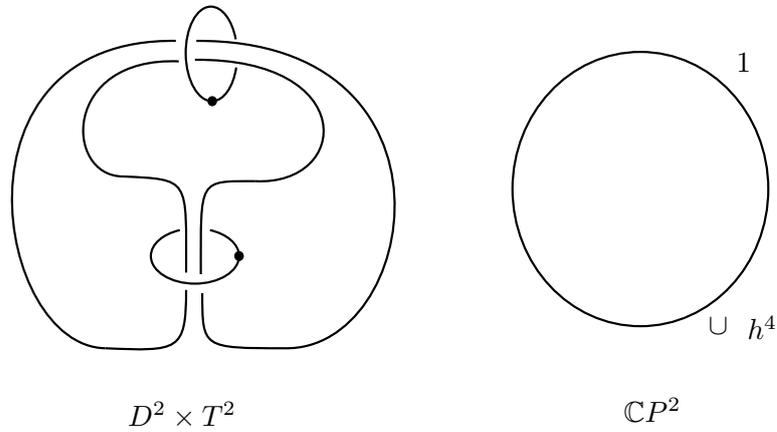


図4 $D^2 \times T^2$ と CP^2 の Kirby 図式

2 ブローアップと Kaliman modification

2.1 ブローアップ

整数 $n \geq 2$ に対し, $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$ の部分多様体 $\widetilde{\mathbb{C}}^n$ を

$$\widetilde{\mathbb{C}}^n = \{(\lambda x, [x]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1} \mid x \in \mathbb{C}^n - \{0\}, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

と定める. これに対し, 第一成分への射影 $\pi_1: \widetilde{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, 第二成分への射影 $\pi_2: \widetilde{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ を考える. まず π_1 について1点の逆像に注目すると, $a \neq 0$ ならば $\pi_1^{-1}(a) = \{(a, [a])\}$, 原点 0 に対しては $\pi_1^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{C}P^{n-1}$ である. よって特に, 制限写像

$$\pi_1|_{\widetilde{\mathbb{C}}^n - \pi_1^{-1}(0)}: \widetilde{\mathbb{C}}^n - \pi_1^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}^n - \{0\}$$

は双正則写像となる. 一方, π_2 は **tautological line bundle** と呼ばれる $\mathbb{C}P^{n-1}$ 上の正則直線束である. この直線束の零切断は $\pi_1^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{C}P^{n-1}$ と一致している.

定義 2.1 (ブローアップ). M を n 次元複素多様体とし, 点 $a \in M$ を固定する. \mathbb{C}^n の原点 $\mathbf{0}$ を含む十分小さい半径 $\varepsilon > 0$ の開球 B_ε^{2n} に対し, $\varphi(\mathbf{0}) = a$ となる正則埋め込み $\varphi: B_\varepsilon^{2n} \rightarrow M$ をとる. また, tautological line bundle のファイバーを B_ε^{2n} に制限したものの全空間を $\widetilde{\mathbb{C}}_\varepsilon^n$ とおく. このとき, $\psi := \varphi \circ \pi_1|_{\widetilde{\mathbb{C}}_\varepsilon^n - \pi_1^{-1}(\mathbf{0})}$ による貼り合わせによって, 新たな複素多様体

$$\widetilde{M} := (M - \{a\}) \cup_\psi \widetilde{\mathbb{C}}_\varepsilon^n$$

が得られる. この \widetilde{M} を, 点 $a \in M$ における M の 1 点ブローアップと言う. ここで, $M - \{a\}$ 上の恒等写像および π_1 の $\widetilde{\mathbb{C}}_\varepsilon^n - \pi_1^{-1}(\mathbf{0})$ への制限写像から誘導される自然な射影を $\pi'_1: \widetilde{M} \rightarrow M$ と表す. このとき, \widetilde{M} と同様に, π'_1 も点 a における M の 1 点ブローアップと呼ばれ, $(\pi'_1)^{-1}(a)$ はその例外因子と呼ばれる. また, 点 a を含む部分多様体 $F \subset M$ に対し, $(\pi'_1)^{-1}(F - \{a\})$ を F の固有変換と言う.

例 2.2 (\mathbb{C}^n の原点における 1 点ブローアップ). \mathbb{C}^n の原点における 1 点ブローアップとは, $\widetilde{\mathbb{C}}^n$ もしくは π_1 のことに他ならない. 以下では, ブローアップ $\widetilde{\mathbb{C}}^n$ に対する 2 つの異なる見方を説明する.

まず, 制限写像 $\pi_1|_{\widetilde{\mathbb{C}}^n - \pi_1^{-1}(\mathbf{0})}: \widetilde{\mathbb{C}}^n - \pi_1^{-1}(\mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{C}^n - \{\mathbf{0}\}$ が双正則であることと, tautological line bundle π_2 の零切断が $\pi_1^{-1}(\mathbf{0}) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$ と一致することを思い出そう. すると, ブローアップ $\widetilde{\mathbb{C}}^n$ とは \mathbb{C}^n から原点 $\mathbf{0}$ を取り除き tautological line bundle の零切断を挿入したものである, という解釈が可能である. これが 1 つ目の見方である.

他方, 以下でみるように, ブローアップ $\widetilde{\mathbb{C}}^n$ は \mathbb{C}^n と $\overline{\mathbb{C}P}^n$ の連結和である, という解釈も可能である. まず, $\overline{\mathbb{C}P}^n - \{p_0\}$ から $\widetilde{\mathbb{C}}^n$ への微分同相写像 Φ を

$$\Phi([z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}]) = \left(\frac{\overline{z_{n+1}}}{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2} (z_1, z_2, \dots, z_n), [z_1, z_2, \dots, z_n] \right)$$

によって定義する. ただし, $p_0 = [0, 0, \dots, 1]$ である. さらに, 単位球体 $D^{2n} \subset \mathbb{C}^n$ の埋め込み $\varphi_1: D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ および $\varphi_2: D^{2n} \rightarrow \overline{\mathbb{C}P}^n$ をそれぞれ

$$\varphi_1(z_1, z_2, \dots, z_n) = (z_1, z_2, \dots, z_n), \quad \varphi_2(z_1, z_2, \dots, z_n) = [z_1, z_2, \dots, z_n, 1]$$

によって定め, 連結和 $\mathbb{C}^n \# \overline{\mathbb{C}P}^n$ を接着空間

$$(\overline{\mathbb{C}P}^n - \varphi_2(\text{Int}D^{2n})) \cup_{\varphi_2|_{\partial D^{2n}}} (\mathbb{C}^n - \varphi_1(\text{Int}D^{2n}))$$

とみなす. このとき, $\mathbb{C}^n \# \overline{\mathbb{C}P}^n$ から $\widetilde{\mathbb{C}}^n$ への写像 f を

$$f(x) = \begin{cases} ((z_1, z_2, \dots, z_n), [z_1, z_2, \dots, z_n]) & (x = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n - \varphi_1(\text{Int}D^{2n})) \\ \Phi(x) & (x = [z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}] \in \overline{\mathbb{C}P}^n - \varphi_2(\text{Int}D^{2n})) \end{cases} \quad (1)$$

によって定めれば, これは微分同相写像である. 尚, 連結和をとることはトポロジカルな操作なので, $\mathbb{C}^n \# \overline{\mathbb{C}P}^n$ 上に自然な複素構造は存在しないが, 微分同相写像 f によって $\widetilde{\mathbb{C}}^n$ の複素構造を引き戻すことにより $\mathbb{C}^n \# \overline{\mathbb{C}P}^n$ を複素多様体とみなすことができる. このようにして, ブローアップ $\widetilde{\mathbb{C}}^n$ は連結和 $\mathbb{C}^n \# \overline{\mathbb{C}P}^n$ と同一視される.

2.2 Kaliman modification

ここでは、Kaliman modification の定義と性質、例について述べた後、主結果に必要な考察をする。

定義 2.3 (Kaliman modification). M を非特異な複素代数多様体、 F を M 中の既約超曲面、 a を F 上の正則点とする。3つ組 (M, F, a) の **Kaliman modification** とは、多様体 $\widetilde{M} - \widetilde{F}$ のことを言い、 $\text{Kalmod}(M, F, a)$ と書く。ここで、 \widetilde{M} は点 a における M の 1 点ブローアップ、 \widetilde{F} は F の固有変換である。

Kaliman modification について、以下の命題が成り立つ。

命題 2.4 ([Ka94]). M がアフィン代数多様体であって、 $H^1(M; \mathbb{Z}) = H^2(M; \mathbb{Z}) = 0$ であるとき、 $\text{Kalmod}(M, F, a)$ もアフィンである。

命題 2.5 ([Ka94]). 既約超曲面 F が位相多様体かつ非輪状ならば、 M が可縮であることと $\text{Kalmod}(M, F, a)$ が可縮であることは同値である。

Kaliman modification は、可縮な代数多様体の構成や、 \mathbb{R}^{2n} 上の標準的でない幾何構造を与えるための手法として有効である。以下で例をいくつか述べる。

例 2.6 ([Ka94]). Kaliman は、Kaliman modification と命題 2.4, 命題 2.5, 命題 3.6 などを用いることで、 \mathbb{C}^n ($n \geq 3$) と微分同相だが双正則でない代数多様体の例を構成した。

例 2.7 (tom Dieck-Petrie 曲面 [DP90]). p, q を互いに素な 2 以上の整数とする。このとき、 $A_{p,q} := \text{Kalmod}(\mathbb{C}^2, \{x^p - y^q = 0\}, (1, 1))$ は可縮な代数多様体となる。また、これは \mathbb{C}^3 内のアフィン代数多様体

$$\left\{ \frac{(xz + 1)^p - (yz + 1)^q - z}{z} = 0 \right\}$$

と代数多様体として同型である。

例 2.8 ([Mc09]). 複素多項式 $f(z_0, z_1, z_2, z_3) := z_0^7 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ に対し、 $F := f^{-1}(0)$ とおく。 \mathbb{C}^4 内の単位球面 S^7 に対し、 $S^7 \cap F$ が S^5 と同相であることから F は \mathbb{R}^6 と同相な位相多様体である。このとき、命題 2.4, 命題 2.5 より $K_4 := \text{Kalmod}(\mathbb{C}^4, F, a)$ は可縮な有限型 Stein 多様体となる。従って、命題 3.6 より K_4 は \mathbb{R}^8 と微分同相である。帰納的に $K_{n+1} := \text{Kalmod}(K_n \times \mathbb{C}, K_n \times \{0\}, (a, 0))$ ($n \geq 4$) と定めると、 K_n は \mathbb{R}^{2n} と微分同相な Stein 多様体であるが、その Stein 構造は \mathbb{C}^n に自然に定まる Stein 構造とは異なる (exotic Stein 構造)。さらに、複数の K_n を 1-ハンドルで接合していくことで、可算無限個の exotic Stein 構造を構成できる。

ここで、Kaliman modification の最も基本的な例を確認しておく。

例 2.9 ($\text{Kalmod}(\mathbb{C}^n, F := \{z_n = 0\}, \mathbf{0})$). 原点 $\mathbf{0}$ における \mathbb{C}^n の 1 点ブローアップ $\pi_1: \widetilde{\mathbb{C}^n} \rightarrow \mathbb{C}^n$

に対し、固有変換 \tilde{F} は

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= \overline{\pi_1^{-1}(F - \mathbf{0})} \\ &= \overline{\pi_1^{-1}(\{(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, 0) \neq \mathbf{0}\})} \\ &= \{(\lambda(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, 0), [z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, 0]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1} \mid (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, 0) \neq \mathbf{0}, \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \pi_2^{-1}(\mathbb{C}P^{n-2})\end{aligned}$$

となる。従って、 $\mathbb{C}P^{n-1} \cong \mathbb{C}P^{n-2} \cup \mathbb{C}^{n-1}$ に注意すると、

$$\text{Kalm}(\mathbb{C}^n, F, \mathbf{0}) = \widetilde{\mathbb{C}^n} - \tilde{F} \cong \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^n$$

が得られる。

この例は、Kaliman modification が補空間 $M - F$ に 2-ハンドルを接着する操作として解釈されることを示唆している。実際、 \mathbb{C}^n から F (の管状近傍) を取り除くことは 0-ハンドルへの 1-ハンドル接着に相当し、 z_n 平面上の円周を接着円周として $\mathbb{C}^n - F$ へ 2-ハンドルを接着すると、1-ハンドルと 2-ハンドルがキャンセルされ再び \mathbb{C}^n に戻る。実際、この考察は正しく、ブローアップ $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ を連結和 $\mathbb{C}^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ とみることで、次の命題を得た。

命題 2.10 ([Ak25]). $\text{Kalm}(M, F, a)$ は、補空間 $M - F$ に 2-ハンドルを接着することで得られる多様体と微分同相である。特に、この 2-ハンドルは例 1.4 で与えた $\overline{\mathbb{C}P^n}$ のハンドル分解における 2-ハンドルに一致する。

3 Stein 多様体

ここでは、Stein 多様体の定義とそれに関するいくつかの事実を [CE12] を基に述べる。

定義 3.1 (狭義多重劣調和関数, exhausting 関数). (X, J) を複素多様体とする。 X 上の滑らかな関数 $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ が狭義多重劣調和であるとは、 φ が X 内の任意の複素曲線上で狭義劣調和であること、すなわち複素曲線上の座標 $z = x + iy$ をとったとき

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi > 0$$

であることを言う。

また、 X 上の関数 ψ が **exhausting** であるとは、任意の実数 c に対し X の部分集合 $\{x \in X \mid \psi(x) < c\}$ が相対コンパクトであることを言う。

定義 3.2 (Stein 多様体, Stein 構造). (X, J) を複素多様体とする。 X 上に狭義多重劣調和かつ exhausting な関数 ϕ が存在するとき、組 (J, ϕ) を **Stein 構造**、組 (X, J, ϕ) を **Stein 多様体** と言う。 J, ϕ が何か明らかな場合には、Stein 多様体 (X, J, ϕ) を単に X と書くこともある。 ϕ が Morse 関数で高々有限個の非退化臨界点しか持たないとき、Stein 構造 (J, ϕ) は**有限型**であると言う。

注意 3.3. 狭義多重劣調和関数, exhausting 関数は、摂動することによりいつでもその性質を保ったまま Morse 関数にすることができる。

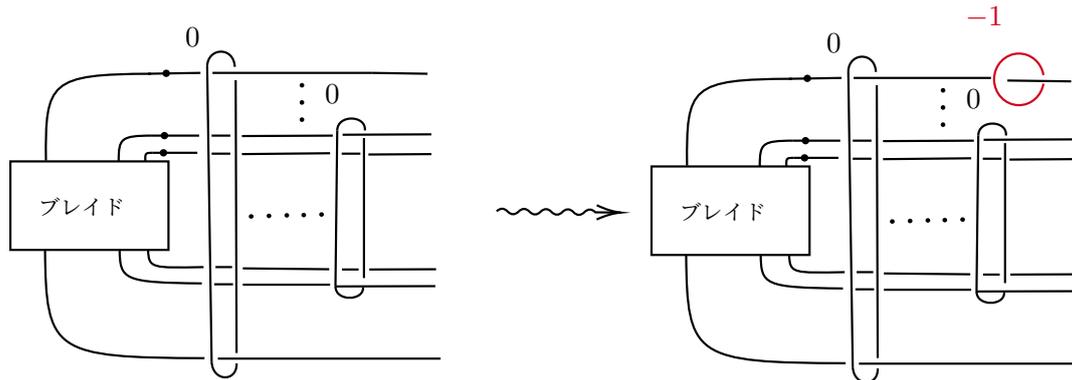


図5 菅原による補空間 $\mathbb{C}^2 - C$ の Kirby 図式のローカルモデル (図左) と Kaliman modification による 2-ハンドルの接着 (図右)

例 3.4. 標準的な複素構造を備えた \mathbb{C}^n は Stein 多様体である. 実際, $\phi(z) = \|z\|^2$ が狭義多重劣調和かつ exhausting な関数としてとれる. また, \mathbb{C}^n 内の非特異なアフィン代数多様体 M にも, 制限 $\phi|_M$ によって Stein 構造が入る. これらは有限型である.

Stein 多様体の重要な位相的性質として, 次の命題がある.

命題 3.5. 複素 n 次元の Stein 多様体は, 各ハンドルの指数が n 以下のハンドル分解を許容する.

Stein 多様体の微分同相型について, 次の命題が成り立つ.

命題 3.6 ([CD94]). (X, J, ϕ) を可縮かつ有限型の Stein 多様体とする. もし $n := \dim_{\mathbb{C}} X \geq 3$ ならば, X は \mathbb{R}^{2n} と微分同相である.

4 主定理

複素 2 次元においては, \mathbb{C}^2 内の代数曲線の補空間のハンドル分解およびそれを表す Kirby 図式の記述方法が菅原 [Su24] によって既に得られている. 菅原の方法と命題 2.10 を合わせることで, \mathbb{C}^2 の Kaliman modification の Kirby 図式を得た.

定理 4.1. C を \mathbb{C}^2 内の既約代数曲線, a を C 上の滑らかな点とする. 複素曲面 $\text{Kalmod}(\mathbb{C}^2, C, a)$ の Kirby 図式は, 菅原 [Su24] の方法で得られる $\mathbb{C}^2 - C$ の Kirby 図式内の 1 つの 1-ハンドルの点付き円周に, その管状近傍のメリディアンに沿ってフレーミング -1 の 2-ハンドルの接着円周を描いたものとして得られる (図 5).

複素 3 次元においては, 命題 3.6 を用いて \mathbb{R}^6 上の有限型 Stein 構造を Kaliman modification によって構成した.

定理 4.2. (p, q, r) をどの 2 つも互いに素な 2 以上の正整数の組とし, 複素多項式 $f(x, y, z) = x^p + y^q + z^r$ を考える. a を $f^{-1}(0)$ 上の正則点とする. このとき, 複素多様体 $\text{Kalmod}(\mathbb{C}^3, f^{-1}(0), a)$ は \mathbb{R}^6 と微分同相な有限型 Stein 多様体である.

参考文献

- [Ak25] 赤川 正朋 『Kaliman modification とハンドル接着』 北海道大学, 修士論文 (2025).
- [CD94] A. D. R. Choudary, A. Dimca, *Complex hypersurfaces diffeomorphic to affine spaces*, Kodai Math. J., **17**, no.2 (1994), 171–178.
- [CE12] K. Cieliebak, Y. Eliashberg, *From Stein to Weinstein and back: Symplectic Geometry of Affine Complex Manifolds*, AMS (2012).
- [DP90] T. tom Dieck, T. Petrie, *Contractible affine surfaces of Kodaira dimension one*, Japan J. Math, **16** (1990), 147–169.
- [EH24] 遠藤 久顕, 早野 健太 『4次元多様体とファイバー構造: レフシェッツ束のトポロジー』 共立出版 (2024).
- [GS99] R. E. Gompf, A. I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Grad. Stud. in Math., **20**, AMS, Providence, RI, (1999), xvi+558 pp.
- [Ka94] S. Kaliman, *Exotic analytic structures and Eisenman intrinsic measures*, Israel J. Math, **88** (1994), 411–423.
- [LP72] F. Laudenbach, V. Poénaru, *A note on 4-dimensional handlebodies*, Bull. Soc. Math. France, **100** (1972), 337–344.
- [Mc09] M. McLean, *Lefschetz fibrations and symplectic homology*, Geometry and Topology, **13** (2009), 1877–1944.
- [Su24] S. Sugawara, *On the topology of the complements of plane algebraic curves*, Hokkaido University (2024), Doctoral Thesis.
- [Ta92] 田村 一郎 『微分位相幾何学』 岩波書店 (1992) .